



PERÚ

Ministerio  
de Educación

Despacho  
Viceministerial de  
Gestión Institucional

Dirección Regional de  
Educación de Lima  
Metropolitana

Unidad de Gestión Educativa  
Local N° 06

Área de Gestión de la  
Educación Básica  
Regular y Especial

"Decenio de la Igualdad de oportunidades para mujeres y hombres"  
"Año de la Esperanza y el Fortalecimiento de la Democracia"

Lima, 28 de setiembre de 2026

**OFICIO MÚLTIPLE N.º 00344-2026-MINEDU/VMGI-DRELM-UGEL06/DIR-AGEBRE**

Sres.(as).

**DIRECTORES(AS) DE LAS INSTITUCIONES EDUCATIVAS DE LA JURISDICCIÓN DE LA UGEL 06**

Presente. -

**Asunto: DIFUSIÓN DEL SOLUCIONARIO DE LOS PROBLEMAS DE LA OLIMPIADA NACIONAL ESCOLAR DE MATEMÁTICA (ONEM) – ETAPA REGIONAL 2026.**

**Referencia:** a) Oficio Múltiple N.º 00751-2026-MINEDU/VMGI-DRELM/DIR-OGPEBTP  
b) Correo emitido por el equipo ONEM del Ministerio de Educación.

De mi consideración:

Tengo el agrado de dirigirme a ustedes, en mi calidad de especialista, en atención al documento de la referencia, mediante el cual se comunica que la Comisión Organizadora de la Olimpiada Nacional Escolar de Matemática (ONEM) del Ministerio de Educación ha remitido el solucionario correspondiente a los problemas de la Etapa Regional de la ONEM 2026.

En tal sentido, se solicita a los directores de las instituciones educativas disponer la difusión del referido solucionario entre toda la comunidad educativa, comprendida por directivos, docentes, estudiantes y familias, a través de los medios y canales de comunicación institucional que correspondan.

La difusión de este material permitirá promover el análisis de los problemas propuestos, fortalecer las competencias matemáticas de los estudiantes y favorecer el desarrollo de estrategias y procedimientos para la resolución de problemas, contribuyendo al fortalecimiento de los aprendizajes en el área de Matemática.

Asimismo, se recomienda que los docentes del área puedan utilizar el solucionario como material de apoyo para generar espacios de análisis, reflexión y retroalimentación con los estudiantes, promoviendo la argumentación y comunicación de los procedimientos empleados en la resolución de los problemas.

Por lo expuesto, agradeceré disponer las acciones necesarias para garantizar la difusión del solucionario a toda la comunidad educativa, dejando constancia de las acciones realizadas en el marco de la presente comunicación.

Se suscribe el presente documento en mérito a las atribuciones y facultades delegadas por la directora de la Unidad de Gestión Educativa Local N.º 06 – La Molina, en atención a la Resolución Directoral N.º 00189-2026-UGEL 06.

Hago propicia la oportunidad para expresarle los sentimientos de mi especial consideración.

EXPEDIENTE: ESP-EBR-EBE2026-INT-0852448

CLAVE: 19A1B3

Esto es una copia auténtica imprimible de un documento electrónico archivado en el Ministerio de Educación, aplicando lo dispuesto por el Art. 25 de D.S. 070-2013-PCM y la Tercera Disposición Complementaria Final del D.S. 026-2016-PCM. Su autenticidad e integridad pueden ser contrastadas a través de la siguiente dirección web:

[https://esinad.minedu.gob.pe/e\\_sinadmed\\_8/VDD\\_ConsultaDocumento.aspx](https://esinad.minedu.gob.pe/e_sinadmed_8/VDD_ConsultaDocumento.aspx)



[www.ugel06.gob.pe](http://www.ugel06.gob.pe)

Av. Simón Bolívar 144  
Ate  
T: 986617749



PERÚ

Ministerio  
de Educación

Despacho  
Viceministerial de  
Gestión Institucional

Dirección Regional de  
Educación de Lima  
Metropolitana

Unidad de Gestión Educativa  
Local N° 06

Área de Gestión de la  
Educación Básica  
Regular y Especial

Atentamente,

FIRMADO DIGITALMENTE

**Dra. MERY MARISA ORELLANA VASQUEZ**  
JEFA (E) DEL ÁREA DE GESTIÓN DE LA EDUCACIÓN  
BÁSICA REGULAR Y ESPECIAL – UGEL N.º 06

MMOV / J(e). AGEBRE  
JLJE / Téc. Adm. AGEBRE



ORELLANA VASQUEZ Mery  
Marisa FAU 2032030800  
soft

JEFA DE AGEBRE -  
UGEL06

En señal de conformidad

2026/09/28 19:08:49

EXPEDIENTE: ESP-EBR-EBE2026-INT-0852448

CLAVE: 19A1B3

Esto es una copia auténtica imprimible de un documento electrónico archivado en el Ministerio de Educación, aplicando lo dispuesto por el Art. 25 de D.S. 070-2013-PCM y la Tercera Disposición Complementaria Final del D.S. 026-2016-PCM. Su autenticidad e integridad pueden ser contrastadas a través de la siguiente dirección web:

[https://esinad.minedu.gob.pe/e\\_sinadmed\\_8/VDD\\_ConsultaDocumento.aspx](https://esinad.minedu.gob.pe/e_sinadmed_8/VDD_ConsultaDocumento.aspx)

[www.ugel06.gob.pe](http://www.ugel06.gob.pe)

Av. Simón Bolívar 144  
Ate  
T: 986617749





# Solucionario Oficial 2026

## Etapas Regional

Nivel 1

Nivel 2

Nivel 3



PERÚ

Ministerio  
de Educación



Empresarios por  
la Educación



# ON EM ACEROS AREQUIPA

Nivel 1



PERÚ

Ministerio  
de Educación



Empresarios por  
la Educación



1. Las edades de siete personas son 7, 8, 12, 13, 15, 17 y 18 años. Es posible dividirlos en dos grupos, uno de tres personas y otro de cuatro personas, de modo que el promedio del grupo de tres personas sea 2 años mayor que el promedio del otro grupo de cuatro personas. ¿Cuál es el promedio del grupo de tres personas?

**Solución.**

Sea  $x$  el promedio del grupo de cuatro personas. Entonces, el promedio del grupo de tres personas es  $x + 2$ . Como la suma de las siete edades es 90, tenemos que la suma de las edades de las personas del grupo de 4 personas es  $4x$  y la suma de las edades de las personas del grupo de 3 personas es  $3(x + 2)$ , entonces

$$4x + 3(x + 2) = 90,$$

de donde  $x = 12$ .

Por tanto, el promedio del grupo de tres personas es  $x + 2 = 14$  años.

Respuesta: 14



## Etapa UGEL - Nivel 1

2. Un conductor había calculado la duración de su viaje suponiendo que mantendría constante su rapidez inicial. Después de recorrer la tercera parte del camino, aumentó su rapidez en un 25 % y llegó a su destino 2 horas antes de lo previsto. ¿Cuántas horas duró realmente el viaje?

### Solución.

Sea  $T$  la duración prevista del viaje. La primera tercera parte del camino tomó  $\frac{T}{3}$  horas. Como la velocidad aumentó en un 25 %, pasó a ser  $\frac{5}{4}$  de la velocidad inicial, por lo que las dos terceras partes restantes tomaron  $\frac{4}{5} \cdot \frac{2T}{3} = \frac{8T}{15}$  horas.

Así, el viaje duró realmente  $\frac{T}{3} + \frac{8T}{15} = \frac{13T}{15}$  horas. Como llegó 2 horas antes, entonces  $\frac{2T}{15} = 2$ , de donde  $T = 15$ . Por tanto, la duración real fue  $T - 2 = 13$  horas.

Respuesta: 13.



### Etapa UGEL - Nivel 1

---

3. Sea  $n$  un entero positivo. Entre los números  $1, 2, 3, \dots, n$  hay exactamente 9 múltiplos de 8 y exactamente 8 múltiplos de 9. Además,  $n$  es múltiplo de 11. Determine el valor de  $n$ .

**Solución.**

El noveno múltiplo positivo de 8 es 72 y el décimo es 80. Como entre 1 y  $n$  hay exactamente 9 múltiplos de 8, debemos tener  $72 \leq n < 80$ .

Por otro lado, el octavo múltiplo positivo de 9 es 72 y el noveno es 81. Como entre 1 y  $n$  hay exactamente 8 múltiplos de 9, debemos tener  $72 \leq n < 81$ .

Combinando ambas condiciones, obtenemos  $72 \leq n \leq 79$ . Como  $n$  es múltiplo de 11 la única posibilidad es  $n = 77$ .

Respuesta: 77



## Etapa UGEL - Nivel 1

4. Sea  $ABC$  un triángulo isósceles con  $AB = AC$ . Sobre el lado  $AC$  se eligen dos puntos  $M$  y  $N$  tales que  $AM = BM = BN$  y  $\angle MBN = 20^\circ$ . Si  $\angle CBN = n^\circ$  entonces  $n$  puede tomar dos valores. Determine la suma de dichos valores.

### Solución.

Si el orden de los puntos es  $A, M, N, C$ , entonces  $\angle BMN = \angle BNM = 80^\circ$  y entonces  $\angle BAM = 40^\circ$ . Luego,  $\angle ABC = 70^\circ$ , de donde  $\angle CBN = 10^\circ$ .

Si el orden de los puntos es  $A, N, M, C$ , entonces  $\angle BMN = \angle BNM = 80^\circ$  y entonces  $\angle BAM = 50^\circ$ . Luego,  $\angle ABC = 65^\circ$ , de donde  $\angle CBN = 35^\circ$ .

Por lo tanto, la suma de los posibles valores de  $n$  es 45.

Respuesta: 45



## Etapa UGEL - Nivel 1

5. En una tienda, cada jugo de naranja cuesta 4 soles y cada jugo de manzana cuesta 5 soles. Por cada 4 jugos de naranja que se compran, se recibe gratis un jugo de manzana. María necesita llevarse al menos 11 jugos de naranja y 10 jugos de manzana. ¿Cuál es la menor cantidad de soles que debe pagar?

### Solución.

María debe comprar al menos 11 jugos de naranja, tenemos los siguientes casos:

Si María compra 11 jugos de naranja, recibe 2 jugos de manzana gratis y debe comprar los otros 8 (por lo menos). En este caso pagaría  $11 \times 4 + 8 \times 5 = 84$  soles como mínimo.

Si María compra 12 jugos de naranja, recibe 3 jugos de manzana gratis y solo debe comprar 7 (por lo menos). En este caso pagaría  $12 \times 4 + 7 \times 5 = 83$  soles como mínimo.

Si compra 13, 14 o 15 jugos de naranja, sigue recibiendo solamente 3 jugos de manzana gratis. Por lo tanto, pagará más que si comprara 12 jugos de naranja.

A partir de allí, por cada 4 jugos de naranja adicionales debe pagar 16 soles y recibe solamente un jugo de manzana adicional, lo que le permite ahorrar como máximo 5 soles. Por tanto, cada grupo adicional de 4 jugos de naranja hace que el pago total aumente por lo menos en  $16 - 5 = 11$  soles.

En consecuencia, comprar más de 12 jugos de naranja no puede hacer que María pague menos. Por lo tanto, la menor cantidad que debe pagar es 83 soles.

Respuesta: 83



## Etapa UGEL - Nivel 1

6. Un reloj digital muestra la hora en formato de 24 horas, utilizando dos dígitos para indicar la hora y otros dos para indicar los minutos. Por ejemplo, puede mostrar 07:12 o 22:08. En cierto momento los cuatro dígitos que muestra ese reloj son distintos entre sí. Después de exactamente  $n$  minutos, aún en el mismo día, el reloj vuelve a mostrar una hora cuyos cuatro dígitos son distintos entre sí y, además, cada uno de los cuatro dígitos es diferente del dígito que ocupaba esa misma posición al inicio. Determine el menor valor posible de  $n$ .

### Solución.

Supongamos primero que  $n \leq 14$ . Como los dos dígitos que indican la hora deben cambiar, los momentos inicial y final pertenecen a horas consecutivas. Los únicos cambios de hora, sin pasar al día siguiente, en los que cambian ambos dígitos son

$$09 \rightarrow 10 \quad \text{y} \quad 19 \rightarrow 20.$$

En el primer caso, la hora final estaría entre 10:00 y 10:13. Entre 10:00 y 10:09 se repite el dígito 0, y entre 10:10 y 10:13 se repite el dígito 1. Por tanto, ninguna de esas horas tiene cuatro dígitos distintos.

En el segundo caso, la hora final estaría entre 20:00 y 20:13. La única de estas horas con cuatro dígitos distintos es 20:13. Para llegar a ella desde una hora que empieza con 19 en no más de 14 minutos, la hora inicial tendría que ser 19:59, que no es válida porque el dígito 9 se repite. Así,  $n \geq 15$ .

Finalmente, entre 19:58 y 20:13 transcurren exactamente 15 minutos. Ambas horas tienen cuatro dígitos distintos y, posición por posición, los cambios son

$$1 \rightarrow 2, \quad 9 \rightarrow 0, \quad 5 \rightarrow 1, \quad 8 \rightarrow 3.$$

Por lo tanto, el menor valor posible de  $n$  es 15.

Respuesta: 15



## Etapa UGEL - Nivel 1

7. Un bloque del juego Jenga tiene dimensiones 1 cm, 1 cm y 3 cm. Se ubican 24 bloques de jenga de la siguiente forma:



Se quiere asignar un color a cada bloque (sin mover los bloques) de tal forma que cualesquiera dos bloques que se toquen deben tener colores distintos. ¿Cuántos colores se necesita como mínimo?

### **Solución.**

Los bloques están distribuidos por niveles, desde el nivel 1 en la parte superior hasta el nivel 8 en la parte inferior.

Consideremos dos bloques juntos del nivel 1 y dos bloques juntos del nivel 2. Notamos que cualesquiera cuatro de estos bloques se tocan, por lo tanto, se necesita al menos 4 colores.

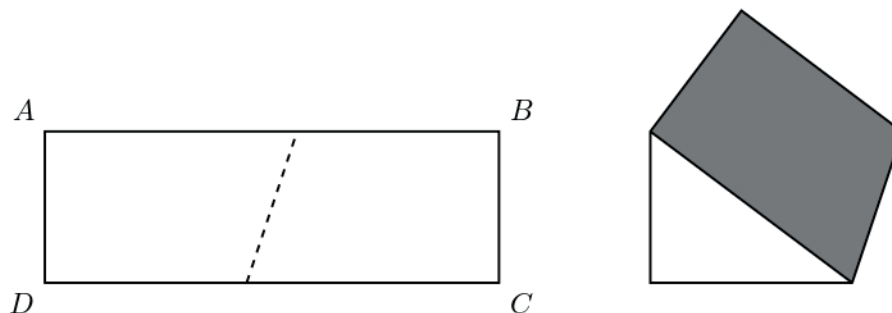
Si los colores son  $A$ ,  $B$ ,  $C$  y  $D$ , un ejemplo consiste en que los bloques en el nivel 1 sean de colores  $A$ ,  $B$ ,  $A$  (en ese orden), en el nivel 2 sean  $C$ ,  $D$ ,  $C$ , y repetir este patrón cada dos niveles.

Respuesta: 4



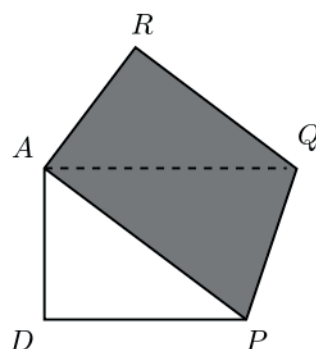
## Etapa UGEL - Nivel 1

8. Un rectángulo de papel  $ABCD$  es blanco de un lado y gris del otro, al hacer un doblez al papel resultó que los vértices  $A$  y  $C$  coincidieron, como se ve en la segunda figura. En esta segunda figura resulta que el área del triángulo blanco es el 48 % del área del cuadrilátero gris. Calcule el cociente  $\frac{DC}{AD}$ .



Solución:

En la siguiente figura, las líneas punteadas indican el lado  $AB$  del rectángulo, que ahora está oculto.



Como los ángulos  $\angle QAD$  y  $\angle PAR$  son rectos, entonces  $\angle RAQ = \angle DAP$ . Como  $AR = AD$ , entonces los triángulos  $QAR$  y  $PAD$  son congruentes. De la congruencia tenemos que  $QA = PA$ . Podemos suponer que el área del triángulo blanco es  $48k$ , entonces el área del triángulo  $QAR$  también es  $48k$  y, en consecuencia, el triángulo  $PAQ$  tiene área  $52k$ . Sea  $d$  la distancia entre las rectas  $AB$  y  $DC$ . Entonces en el triángulo  $AQP$  tenemos que  $AQ \cdot d = 2(52k)$  y en el triángulo  $ADP$  tenemos que  $DP \cdot d = 2(48k)$ , de donde resulta que  $AQ$  y  $DP$  están en relación de 13 a 12. Sea  $AQ = 13\ell$  y  $DP = 12\ell$ , entonces  $PA = 13\ell$ . Por el teorema de Pitágoras en el triángulo  $ADP$ , obtenemos que  $AD = 5\ell$ .

Finalmente,  $DC = DP + AP = 25\ell$  y  $AD = 5\ell$  y el cociente pedido es 5.

Respuesta: 5



## Etapa UGEL - Nivel 1

9. Sean  $a$ ,  $b$  y  $c$  enteros positivos, distintos dos a dos, tales que cada uno de los tres números  $\text{mcd}(a, b)$ ,  $\text{mcd}(b, c)$ ,  $\text{mcd}(c, a)$  es menor o igual que 8. Determine el mayor valor posible de

$$\text{mcd}(ab, bc, ca).$$

*Aclaración:*  $\text{mcd}$  significa máximo común divisor.

### Solución.

Sean

$$x = \text{mcd}(a, b), \quad y = \text{mcd}(b, c), \quad z = \text{mcd}(c, a)$$

y sea  $d = \text{mcd}(a, b, c)$ .

Primero probaremos que

$$\text{mcd}(ab, bc, ca) = \frac{xyz}{d}.$$

Para ello, consideremos un número primo  $p$  y supongamos que sus exponentes en  $a$ ,  $b$  y  $c$ , ordenados de menor a mayor, son  $\alpha \leq \beta \leq \gamma$ .

Los exponentes de  $p$  en  $ab$ ,  $bc$  y  $ca$  son

$$\alpha + \beta, \quad \beta + \gamma, \quad \gamma + \alpha.$$

El menor de ellos es  $\alpha + \beta$ , así que este es el exponente de  $p$  en  $\text{mcd}(ab, bc, ca)$ .

Por otro lado, los exponentes de  $p$  en  $x$ ,  $y$  y  $z$  son  $\alpha$ ,  $\beta$  y  $\alpha$ , en algún orden, mientras que su exponente en  $d$  es  $\alpha$ . Por tanto, el exponente de  $p$  en  $\frac{xyz}{d}$  es

$$\alpha + \beta + \alpha - \alpha = \alpha + \beta.$$

Como esto se cumple para todo primo  $p$ , queda demostrada la identidad.

Ahora distinguimos dos casos.

Si  $d \geq 2$ , como  $x, y, z \leq 8$ , tenemos

$$\text{mcd}(ab, bc, ca) = \frac{xyz}{d} \leq \frac{8^3}{2} = 256.$$

Si  $d = 1$ , entonces  $x, y, z$  son coprimos dos a dos. En efecto, cualquier divisor común de dos de ellos dividiría a  $a$ ,  $b$  y  $c$ , y por tanto dividiría a  $d$ .

Busquemos ahora el mayor producto posible de tres números coprimos dos a dos y menores o iguales que 8. Si uno de ellos es 8, los otros dos deben ser impares y coprimos entre sí. Los dos mayores que se pueden escoger son 7 y 5, por lo que

$$xyz \leq 8 \cdot 7 \cdot 5 = 280.$$

Si ninguno es 8, el producto no puede superar

$$7 \cdot 6 \cdot 5 = 210.$$

Por consiguiente, en este caso el mayor valor posible es 280.

Finalmente, este valor se alcanza tomando

$$a = 40, \quad b = 56, \quad c = 35.$$

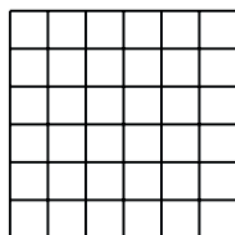
Por lo tanto, el mayor valor posible es 280.

Respuesta: 280.

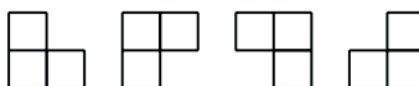


## Etapa UGEL - Nivel 1

10. En cada casilla de un tablero de  $6 \times 6$  se escribe uno de los números 1, 2 o 3, de modo que cada uno de ellos aparezca al menos una vez. Además, la suma de los números escritos en las tres casillas de cualquier  $L$ -triminó contenido en el tablero no es múltiplo de 3. Determine el mayor valor posible de la suma de todos los números escritos en el tablero.



$L$ -triminós:



Solución:

En cada subtablero de  $2 \times 2$  no pueden aparecer los tres números 1, 2, 3 porque habría un  $L$ -triminó cuya suma es  $1 + 2 + 3 = 6$  lo cual no es posible. Además, no es posible que un mismo número aparezca por lo menos tres veces, ya que su suma es múltiplo de 3. Así que la única posibilidad es que en cada subtablero de  $2 \times 2$  haya dos números distintos, donde cada uno aparece dos veces.

Sean  $n_1$ ,  $n_2$  y  $n_3$  las cantidades de veces en las que aparecen los números 1, 2 y 3, respectivamente. Entonces  $n_1 + n_2 + n_3 = 36$ .

Vamos a demostrar que  $n_1 \geq 6$ . El número 1 debe aparecer en el tablero, y como no todos pueden ser 1, entonces existe un número 1 en el tablero que es vecino de un número distinto de 1. Supongamos sin pérdida de generalidad que 1 es vecino del número  $x$  y que ambos están una misma fila ( $x \neq 1$ ). Por la observación inicial, debajo de  $(1, x)$  está  $(1, x)$  o  $(x, 1)$  y aplicamos lo mismo tanto para abajo como para arriba. Entonces en esas dos columnas, el número 1 aparece exactamente 6 veces. Viendo todo el tablero concluimos que  $n_1 \geq 6$ .

Por otro lado, dividimos todo el tablero en 9 subtableros de  $2 \times 2$ . En cada subtablero de  $2 \times 2$  hay como máximo 2 veces 3, entonces  $n_3 \leq 18$ .

Por lo tanto, la suma de todos los números es

$$n_1 + 2n_2 + 3n_3 = 2(n_1 + n_2 + n_3) + n_3 - n_1 = 72 + n_3 - n_1 \leq 72 + 18 - 6 = 84.$$

Un ejemplo en el que se consigue suma 84 es:

|   |   |   |   |   |   |
|---|---|---|---|---|---|
| 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 |
| 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 |
| 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 |
| 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 |

Respuesta: 84



# ON EM ACEROS AREQUIPA

Nivel 2



PERÚ

Ministerio  
de Educación



Empresarios por  
la Educación



1. Una aplicación de taxi cobra 6 soles por la tarifa inicial y 2 soles por cada kilómetro recorrido. Además, cobra un recargo del 10 % sobre el costo del viaje por concepto de gastos de la aplicación. Si Roberto pagó exactamente 33 soles para llegar a su casa, ¿cuántos kilómetros recorrió el taxi?

**Solución.**

Sea  $x$  la cantidad de kilómetros recorridos por el taxi, entonces

$$33 = \frac{110}{100}(6 + 2x) \Rightarrow 6 + 2x = 30 \Rightarrow x = 12.$$

Respuesta: 12



## Etapla DRE - Nivel 2

2. Juan invita a sus cinco amigos a una fiesta. Curiosamente, las edades de sus cinco amigos son cinco enteros positivos consecutivos. Además, Juan tiene la misma edad que uno de sus amigos. Si la suma de las seis edades (la de Juan y sus amigos) es 101, ¿cuál es la edad de Juan?

### Solución.

Sean  $x, x+1, x+2, x+3, x+4$  las edades de los cinco amigos de Juan, las cuales suman  $5x+10$ . La edad de Juan también está en el conjunto  $\{x, x+1, x+2, x+3, x+4\}$ , es decir, es mayor o igual que  $x$  y menor o igual que  $x+4$ , entonces

$$x + (5x + 10) \leq 101 \leq x + 4 + (5x + 10) \Rightarrow 6x + 10 \leq 101 \leq 6x + 14.$$

Luego

$$87 \leq 6x \leq 91 \Rightarrow 14,5 \leq x \leq 15,1 \dots$$

por lo cual  $x = 15$ . Además,  $5x + 10 = 85$ . Por lo tanto, la edad de Juan es  $101 - 85 = 16$ .

Respuesta: 16



## Etapa DRE - Nivel 2

3. Los primeros 100 enteros positivos se escriben uno a continuación de otro, sin dejar espacios, para formar el número

$$M = 12345678910111213 \dots 9899100.$$

Consideremos los números de seis dígitos que pueden obtenerse leyendo, de izquierda a derecha, un dígito de  $M$  y los cinco dígitos que aparecen inmediatamente después de él. Sea  $N$  el mayor de estos números. Determine la suma de los dígitos de  $N$ .

### Solución.

Hallaremos todos los números de 6 dígitos de la forma  $\overline{99abcd}$  que aparecen en  $M$ .

El 99 tiene que aparecer cortado ya que después del número 99 solo aparece el 100. Entonces el 99 tiene que venir el 89 y el 90 (la única opción). Entonces  $N$  aparece en el siguiente bloque:

$$89909192,$$

donde  $N = 990919$ . Nos piden  $9 + 9 + 0 + 9 + 1 + 9 = 37$ .

Respuesta: 37



## Etapa DRE - Nivel 2

4. Sea  $ABCD$  un cuadrilátero convexo tal que  $BC = 8$ ,  $CD = 6$  y

$$\angle ADC = \angle ACB = 2\angle ABC = 2\angle BAD.$$

Determine la longitud del segmento  $AC$ .

### Solución.

Sea  $\angle ABC = \angle BAD = \alpha$  y  $\angle BCA = \angle CDA = 2\alpha$ . Sea  $E$  el punto de intersección de las prolongaciones de los lados  $BC$  y  $AD$ . Notemos que

$$\angle CDE = \angle DEC = \angle ACE = 180^\circ - 2\alpha.$$

Entonces  $CE = CD = 6$  y  $AE = BE = 8 + 6 = 14$ . Finalmente  $AC = AE = 14$ .

Respuesta: 14



## Etapla DRE - Nivel 2

5. Sean  $a, b, c$  números reales tales que

$$abc + a = 1,$$

$$abc + b = 2,$$

$$abc + c = 3.$$

Determine el valor de  $(a + b + c)^3$ .

### Solución.

Si restamos la segunda y la primera igualdad obtenemos  $b - a = 1$ . Si restamos la tercera y la segunda igualdad obtenemos  $c - b = 1$ . Reemplazamos  $a = b - 1$  y  $c = b + 1$  en la segunda igualdad:

$$(b - 1)b(b + 1) + b = 2 \Rightarrow (b^3 - b) + b = 2 \Rightarrow b^3 = 2.$$

Nos piden

$$(a + b + c)^3 = ((b - 1) + b + (b + 1))^3 = (3b)^3 = 27b^3 = 27 \times 2 = 54.$$

Respuesta: 54



## Etapa DRE - Nivel 2

6. La sucesión  $a_1, a_2, a_3, \dots$ , es definida por

$$a_1 = 2, \quad a_{n+1} = 2a_n - 2n + 4 \text{ para todo } n \geq 1.$$

La sucesión  $b_1, b_2, b_3, \dots$ , es definida por

$$b_1 = 3, \quad b_{n+1} = 2b_n - n + 1 \text{ para todo } n \geq 1.$$

Si

$$\frac{a_2}{b_2} \times \frac{a_3}{b_3} \times \frac{a_4}{b_4} \times \dots \times \frac{a_{10}}{b_{10}} = \frac{m}{n},$$

donde  $m$  y  $n$  son enteros positivos cuyo máximo común divisor es 1, determine el valor de  $m + n$ .

### Solución.

Notemos que  $a_1 = 2 = 2^1$ ,  $a_2 = 6 = 2^2 + 2$ ,  $a_3 = 12 = 2^3 + 4$ ,  $a_4 = 22 = 2^4 + 6$ , de donde podemos deducir que  $a_n = 2^n + 2(n - 1)$  para todo  $n \geq 1$ .

Además,  $b_1 = 3 = 2^1 + 1$ ,  $b_2 = 6 = 2^2 + 2$ ,  $b_3 = 11 = 2^3 + 3$ ,  $b_4 = 20 = 2^4 + 4$ , de donde podemos deducir que  $b_n = 2^n + n$  para todo  $n \geq 1$ .

Luego, cada factor es de la forma

$$\frac{a_n}{b_n} = \frac{2^n + 2(n - 1)}{2^n + n} = 2 \times \frac{2^{n-1} + (n - 1)}{2^n + n}.$$

Si sacamos el 2 de cada factor, la expresión queda de la siguiente manera:

$$2^9 \times \frac{2^1 + 1}{2^2 + 2} \times \frac{2^2 + 2}{2^3 + 3} \times \frac{2^3 + 3}{2^4 + 4} \times \dots \times \frac{2^9 + 9}{2^{10} + 10} = 2^9 \times \frac{2^1 + 1}{2^{10} + 10} = \frac{768}{517},$$

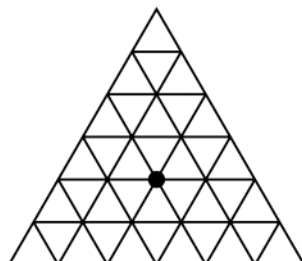
donde  $m = 768$  y  $n = 517$ . Nos piden  $m + n = 1285$ .

Respuesta: 1285.



## Etapa DRE - Nivel 2

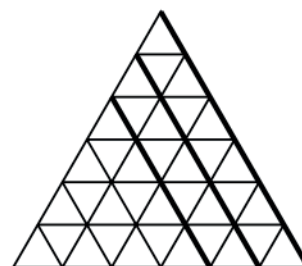
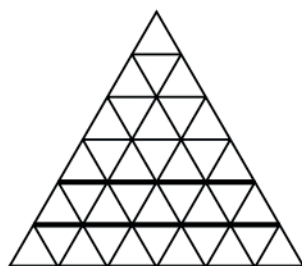
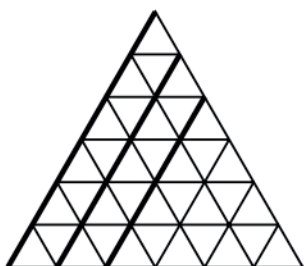
7. En la siguiente figura se tiene un triángulo equilátero dividido en 36 triángulos equiláteros más pequeños.



¿Cuántos triángulos formados con las líneas de la figura cumplen que el centro del triángulo mayor (el punto marcado) está en su interior o en su borde?

### Solución.

Primero contamos los triángulos de la forma . Estos se forman con tres líneas, uno de cada uno de los siguientes grupos:



Entonces la cantidad de tales triángulos es  $3 \times 3 \times 3 - 1 = 26$  (se quita 1 por el caso en que las tres líneas concurren).

Ahora contamos los triángulos de la forma : hay 3 de lado 1, 6 de lado 2 y 1 de lado 3. En total hay  $3 + 6 + 1 = 10$  triángulos en este caso.

Por lo tanto, la cantidad de triángulos pedidos es  $26 + 10 = 36$ .

Respuesta: 36.



## Etapa DRE - Nivel 2

8. Encuentre el menor entero positivo  $n$  para el cual el producto de 99 por  $n$  tiene todos sus dígitos pares.

*Aclaración:* Recuerde que 0 es par.

### Solución.

Supongamos que  $99n = \overline{\dots b_2 a_2 b_1 a_1}$  tiene todos sus dígitos pares. Sea  $A = a_1 + a_2 + \dots$  y  $B = b_1 + b_2 + \dots$ . Por el criterio de divisibilidad por 9 y 11, se tiene que  $A + B$  es múltiplo de 9 y  $A - B$  es múltiplo de 11. Además, sabemos que  $A + B$  y  $A - B$  son pares.

Si  $A + B = 18$ , entonces  $-18 \leq A - B \leq 18$ , por lo cual  $A - B = 0$ , de donde  $A = B = 9$ , lo cual no es posible.

Esto implica que  $A + B \geq 36$ , por lo cual la cantidad de dígitos de  $99n$  es mayor o igual que 5 (ya que el máximo dígito es 8).

Si  $99n = \overline{a_3 b_2 a_2 b_1 a_1}$ , entonces  $A + B = 36$ ,  $0 \leq A \leq 24$  y  $0 \leq B \leq 16$ . Como  $-16 \leq A - B \leq 24$ , entonces  $A - B$  es 0 o 22. Si  $A - B = 22$ , entonces  $A = 29$  y  $B = 7$ . Si  $A - B = 0$ , entonces  $A = B = 18$ . En ambos casos se obtiene una contradicción.

Si  $99n = \overline{b_3 a_3 b_2 a_2 b_1 a_1}$ , entonces  $A + B = 36$ ,  $0 \leq A \leq 24$  y  $0 \leq B \leq 24$ . Como  $-24 \leq A - B \leq 24$ , entonces  $A - B$  es -22, 0 o 22. Análogo al caso anterior, se descartan los casos -22 y 22, por lo cual  $A = B = 18$ . En consecuencia, el menor valor que puede tomar  $99n$  es 228888, de donde  $n = 2312$ .

Respuesta: 2312.



## Etapa DRE - Nivel 2

9. Sea  $ABC$  un triángulo equilátero de área 360. Sean  $D, E, F$  puntos de los lados  $BC, CA, AB$ , respectivamente. Sea  $m$  la menor de las áreas de los siguientes siete triángulos:

$$BEC, BEA, CFA, CFB, ADB, ADC, DEF.$$

¿Cuál es el mayor valor que puede tomar  $m$ ?

### Solución.

Si  $CD = 2BD$ ,  $AE = 2EC$  y  $BF = 2FA$ , entonces

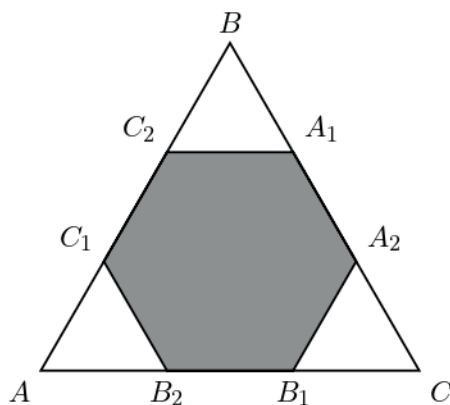
$$[BEC] = [CFA] = [ADB] = 120, [BFC] = [CDA] = [AEB] = 240, [DEF] = 120.$$

En este caso  $m = 120$ .

Supongamos que  $m > 120$ , entonces las siete áreas son mayores que 120, por lo cual

$$\frac{AB}{3} < AF, FB < \frac{2AB}{3}, \frac{BC}{3} < BD, DC < \frac{2BC}{3}, \frac{CA}{3} < CE, EA < \frac{2CA}{3}.$$

Luego, el triángulo  $DEF$  está contenido en el hexágono regular  $A_1A_2B_1B_2C_1C_2$



Los triángulos de mayor área inscritos en dicho hexágono son  $A_1B_1C_1$  y  $A_2B_2C_2$  cuyos áreas son 120, por lo cual  $[DEF] \leq 120$ , lo cual es una contradicción.

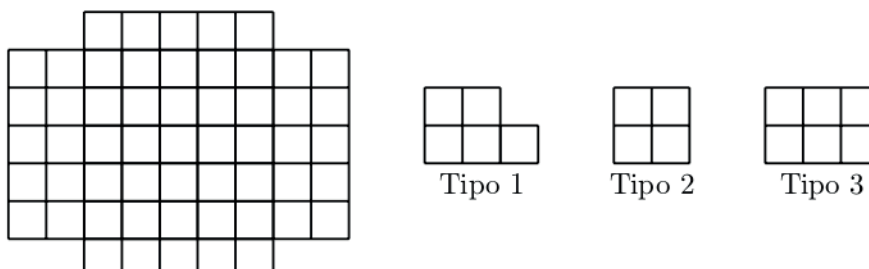
Por lo tanto, el mayor valor que puede tomar  $m$  es 120.

Respuesta: 120



## Etapa DRE - Nivel 2

10. El siguiente tablero es cubierto, completamente y sin superposiciones, con  $a$  fichas tipo 1,  $b$  fichas tipo 2 y  $c$  fichas tipo 3.



Determine la suma de todos los valores que puede tomar  $a$ .

*Aclaración:* Las fichas se pueden rotar y voltear. Es posible que  $a = 0$ ,  $b = 0$  o  $c = 0$ .

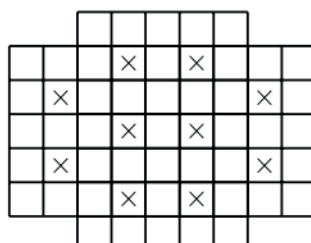
### Solución.

Tenemos la siguiente ecuación

$$5a + 4b + 6c = 55,$$

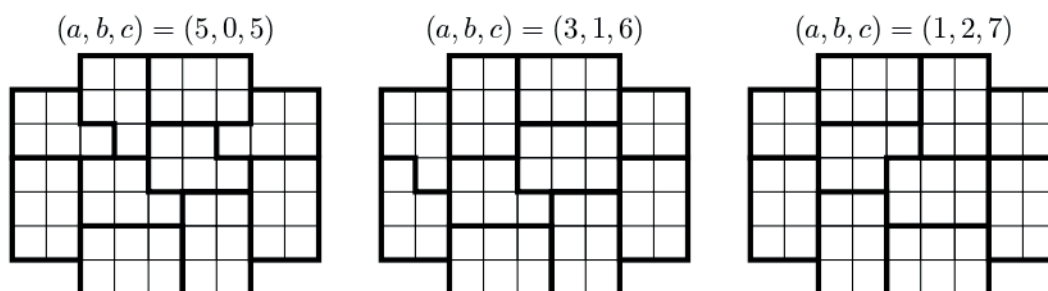
cuyas soluciones son  $(a, b, c) = (11, 0, 0), (7, 5, 0), (3, 10, 0), (9, 1, 1), (5, 6, 1), (1, 11, 1), (7, 2, 2), (3, 7, 2), (5, 3, 3), (1, 8, 3), (3, 4, 4), (5, 0, 5), (1, 5, 5), (3, 1, 6), (1, 2, 7)$ .

Además, si marcamos las siguientes casillas:



Cada ficha cubre al menos una casillas marcada. Como hay 10 casillas marcadas, entonces  $a+b+c \leq 10$ . Luego, las ternas  $(a, b, c)$  que cumplan  $5a + 4b + 6c = 55$  y  $a + b + c \leq 10$  son  $(a, b, c) = (5, 0, 5), (3, 1, 6)$  y  $(1, 2, 7)$ .

Los ejemplos son los siguientes:



Por lo tanto, la suma de los valores que puede tomar  $a$  es  $1 + 3 + 5 = 9$ .

Respuesta: 9



# ON EM ACEROS AREQUIPA

Nivel 3



PERÚ

Ministerio  
de Educación



Empresarios por  
la Educación



1. Las ciudades  $A$  y  $B$  están separadas por una distancia de 70 km. Un automóvil viaja de  $A$  a  $B$ . Durante los primeros 12 minutos viaja a una rapidez constante de 20 km/h, durante los siguientes 12 minutos, a 30 km/h; durante los siguiente 12 minutos, a 40 km/h; y así sucesivamente, aumentando su rapidez en 10 km/h cada 12 minutos. Una ciudad  $C$ , ubicada en el camino de  $A$  a  $B$ , se encuentra a 45 km de  $A$ . ¿A cuántos km/h viajaba el automóvil cuando pasó por  $C$ ?

**Solución.**

Como 12 minutos equivalen a  $\frac{1}{5}$  de hora, en cada tramo el automóvil recorre la quinta parte de su rapidez. Por tanto, en los cinco primeros tramos recorre, respectivamente, 4, 6, 8, 10 y 12 km.

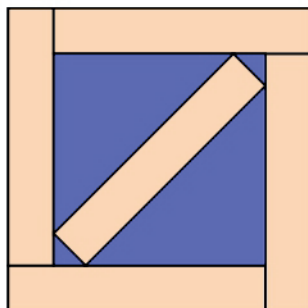
Al finalizar el quinto tramo, ha recorrido  $4 + 6 + 8 + 10 + 12 = 40$  km. Como la ciudad  $C$  está a 45 km de  $A$ , el automóvil pasa por ella durante el sexto tramo. En dicho tramo su rapidez es  $20 + 5 \cdot 10 = 70$  km/h.

Respuesta: 70



### Etapa DRE - Nivel 3

2. En la figura se muestra un cuadrado de lado 12 que ha sido dividido en cinco rectángulos congruentes y cuatro triángulos que son isósceles. Encuentra la suma de las áreas de los cuatro triángulos.



#### Solución.

Supongamos que el cuadrado tiene lado 1 y que los rectángulos tienen lados  $x$  y  $1 - x$ . Entonces,

$$\frac{x}{\sqrt{2}} + \frac{1-x}{\sqrt{2}} = 1 - 2x \implies x = \frac{2 - \sqrt{2}}{4}.$$

El área de uno de los rectángulos es  $x(1 - x) = \frac{1}{8}$ . Como hay cinco rectángulos congruentes, el área sombreada es  $1 - \frac{5}{8} = \frac{3}{8}$ .

Finalmente, como el lado de  $ABCD$  es 12, debemos multiplicar este resultado por  $12^2 = 144$ . Así, el área sombreada es  $\frac{3}{8} \cdot 144 = 54$ . Notar que los lados de los rectángulos son iguales a  $6 - 3\sqrt{2}$  y  $6 + 3\sqrt{2}$  y además su área es igual a 18. La suma de las áreas de los rectángulos es 90. Los catetos de los triángulos son  $3\sqrt{2} - 3$  y  $3\sqrt{2} + 3$  y tienen áreas iguales a  $\frac{27 - 18\sqrt{2}}{2}$  y  $\frac{27 + 18\sqrt{2}}{2}$ , respectivamente. La suma de las áreas de los triángulos es 54.

Respuesta: 54



### Etapa DRE - Nivel 3

---

3. Ana utiliza los dígitos 1,2,3,4,5,6,7,8, una vez cada uno, para formar dos números naturales de cuatro dígitos cada uno. Si ambos números son múltiplos de 9, ¿cuál es el menor valor posible del mayor de los dos números?

**Solución.**

La suma total de dígitos es  $1 + 2 + \dots + 8 = 36$  y como la suma de 4 dígitos es al menos  $1 + 2 + 3 + 4 = 10$ , entonces cada uno de los números tiene suma de dígitos igual a 18. Sean  $m$  y  $M$  el menor y el mayor de los números, si  $M$  comienza con 1 entonces  $m > M$ , lo cual no es posible. Por lo tanto  $M$  comienza con por lo menos 2 y como queremos el menor valor posible de  $M$ , supongamos que  $M$  comienza con 2. Luego  $m$  comienza con 1, de lo contrario nuevamente  $m > M$ . Las formas de descomponer 18 en cuatro sumandos incluyendo el 2, pero son incluir el 1 son: (2,3,5,8), (2,4,5,7). Luego el menor valor posible de  $M$  es 2358.

Respuesta: 2358



### Etapa DRE - Nivel 3

---

4. Determine cuántos divisores positivos del número  $20^{26}$  son de la forma  $3k + 1$  para algún entero no negativo  $k$ .

**Solución.**

Tenemos  $20^{26} = 2^{52} \cdot 5^{26}$ , por lo que cada divisor positivo es de la forma  $2^a 5^b$ , donde  $0 \leq a \leq 52$  y  $0 \leq b \leq 26$ . Como 2 y 5 son ambos múltiplos de 3 menos 1, para que el divisor sea de la forma  $3k + 1$ , entonces  $a$  y  $b$  deben ser ambos pares o ambos impares.

Hay 27 valores pares y 26 impares para  $a$ , mientras que para  $b$  hay 14 valores pares y 13 impares. Así, la cantidad buscada es  $27 \cdot 14 + 26 \cdot 13 = 716$ .

Respuesta: 716



### Etapa DRE - Nivel 3

---

5. En los puntos  $A$ ,  $B$  y  $C$  de un terreno plano se han colocado tres receptores de señal, donde  $AB = 25$  m,  $BC = 52$  m y  $CA = 63$  m. Se desea instalar una antena en algún punto  $P$  del terreno. Si la antena tiene un alcance de  $x$  metros, los tres receptores recibirán señal siempre que  $PA \leq x$ ,  $PB \leq x$  y  $PC \leq x$ . Determine el menor valor entero positivo de  $x$  para el cual es posible elegir el punto  $P$  de modo que los tres receptores reciban señal.

**Solución.**

Los puntos  $A$ ,  $B$  y  $C$  deben estar dentro o en el borde del círculo de centro  $P$  y radio  $x$ . El segmento  $CA$  debe estar dentro de ese círculo, entonces  $2x \geq 63$  y como  $x$  es entero entonces  $x \geq 32$ . Como el triángulo  $ABC$  es obtusángulo, el círculo que tiene centro en el punto medio del lado  $CA$  y radio 32 cubre a los tres puntos  $A$ ,  $B$  y  $C$ .

Respuesta: 32.



### Etapa DRE - Nivel 3

6. Se distribuyen en un tablero de  $4 \times 4$  dieciséis números enteros distintos, todos pertenecientes al conjunto  $\{1, 2, 3, \dots, n\}$ , de modo que cualesquiera dos números ubicados en casillas que comparten un lado o un vértice, sean coprimos. Encuentre el menor valor posible de  $n$ .

*Aclaración:* Dos números son coprimos si su máximo común divisor es 1.

#### Solución.

Dividamos el tablero en cuatro subtableros de  $2 \times 2$ . Como cualesquiera dos casillas de uno de estos subtableros comparten un lado o un vértice, en cada uno puede haber como máximo un número par. Por tanto, en todo el tablero hay como máximo cuatro números pares.

Si  $n \leq 22$ , disponemos de como máximo 11 números impares y 4 pares, es decir, solo 15 números. Luego,  $n \geq 23$ .

Para  $n = 23$ , un ejemplo es:

|    |    |    |    |
|----|----|----|----|
| 2  | 15 | 4  | 21 |
| 11 | 13 | 17 | 19 |
| 8  | 3  | 16 | 9  |
| 5  | 7  | 23 | 1  |

Respuesta: 23



### Etapa DRE - Nivel 3

---

7. Sean  $a$  y  $b$  números reales tales que  $(a + 3)(b + 4) = 1$ . Determine el menor valor posible de  $(ab - 13)^2$ .

**Solución.**

Sean  $x = a + 3$  y  $y = b + 4$ . Entonces  $xy = 1$  y

$$ab - 13 = (x - 3)(y - 4) - 13 = -4x - 3y.$$

Por tanto,

$$(ab - 13)^2 = (4x + 3y)^2 = (4x - 3y)^2 + 48xy = (4x - 3y)^2 + 48 \geq 48.$$

La igualdad se alcanza cuando  $4x = 3y$  y  $xy = 1$ , condiciones que sí tienen soluciones reales.

Respuesta: 48



### Etapa DRE - Nivel 3

8. Sea  $ABC$  un triángulo tal que  $AB = AC$ . Sea  $M$  el punto medio del lado  $BC$  y sea  $N$  el punto medio del segmento  $MC$ . Sea  $D$  el pie de la perpendicular trazada desde  $M$  al lado  $AB$ . Sea  $E$  el punto de intersección de los segmentos  $AN$  y  $CD$ . Si  $BD = 7$  y  $EN = 2$ , determine el valor de  $AD + AE$ .

#### Solución.

Sea  $AD = x$ . Entonces  $AB = x + 7$ . Como  $AB = AC$  y  $M$  es el punto medio de  $BC$ , se tiene  $AM \perp BC$ . Aplicando el teorema de la altura en el triángulo rectángulo  $ABM$ , obtenemos

$$AM^2 = x(x + 7) \quad \text{y} \quad BM^2 = 7(x + 7).$$

Como  $N$  es el punto medio de  $MC$ , tenemos  $MN = \frac{BM}{2}$ . Por Pitágoras en el triángulo  $AMN$ ,

$$AN^2 = AM^2 + MN^2 = x(x + 7) + \frac{7(x + 7)}{4} = \frac{(x + 7)(4x + 7)}{4}.$$

Por otro lado, aplicando el teorema de Menelao en el triángulo  $ABN$  con la recta  $DCE$ , y usando que  $\frac{BC}{CN} = 4$ , se obtiene

$$\frac{AE}{EN} = \frac{4AD}{BD} = \frac{4x}{7}.$$

Como  $EN = 2$ , resulta  $AE = \frac{8x}{7}$  y, por tanto,  $AN = \frac{2(4x+7)}{7}$ . Al comparar las dos expresiones para  $AN^2$ , obtenemos

$$\frac{4(4x + 7)^2}{49} = \frac{(x + 7)(4x + 7)}{4},$$

de donde  $x = \frac{77}{5}$ . Finalmente,

$$AD + AE = x + \frac{8x}{7} = \frac{15x}{7} = 33.$$

Respuesta: 33



### Etapa DRE - Nivel 3

9. Cada casilla de un tablero de  $11 \times 11$  se pinta de rojo o de azul. Dos casillas se consideran vecinas si tienen un lado en común. En cada casilla azul se escribe el número 1, mientras que en cada casilla roja se escribe un número igual a 2 más la cantidad de casillas azules vecinas que tiene. Determine el mayor valor posible de la suma de todos los números escritos en el tablero.

#### Solución.

Sea  $A$  la cantidad de casillas azules y sea  $E$  la cantidad de parejas de casillas vecinas de distinto color. Cada casilla roja aporta inicialmente 2 y cada casilla azul aporta 1. Además, cada pareja formada por una casilla roja y una azul aporta una unidad adicional. Por tanto, la suma total es

$$S = 2(121 - A) + A + E = 242 - A + E.$$

El tablero tiene  $11 \cdot 10 + 11 \cdot 10 = 220$  parejas de casillas vecinas. Si  $M$  es la cantidad de estas parejas que tienen el mismo color, entonces  $E = 220 - M$  y

$$S = 462 - (A + M).$$

Se puede cubrir el tablero con 60 dominós y dejar una casilla sin cubrir. En cada dominó hay una casilla azul o sus dos casillas son rojas. Como los dominós no se superponen, esto implica  $A + M \geq 60$ . En consecuencia,  $S \leq 462 - 60 = 402$ .

Finalmente, pintando el tablero como un tablero de ajedrez, con 60 casillas azules y 61 rojas, todas las casillas vecinas tienen distinto color. En este caso  $E = 220$  y  $S = 242 - 60 + 220 = 402$ .

Respuesta: 402



### Etapa DRE - Nivel 3

10. Para cada entero positivo  $n$ , sea  $s(n)$  la suma de los dígitos de  $n$ . Sean  $a$ ,  $b$  y  $c$  enteros positivos, distintos dos a dos, tales que

$$s(a+k) = s(b+k) = s(c+k)$$

para todo  $k = 1, 2, 3, \dots, 2026$ . Encuentre el menor valor que puede tomar  $a + b + c$  y dé como respuesta la suma de los dígitos del resultado.

#### Solución.

Para todo entero  $x$ , al sumar 1 se cumple  $s(x+1) - s(x) = 1 - 9t$ , donde  $t$  es la cantidad de nueves finales de  $x$ . Eligiendo  $1 \leq k \leq 1000$  tal que  $a+k$  termine en 999 y comparando las igualdades correspondientes a  $k$  y  $k+1$ , se deduce que  $b+k$  y  $c+k$  también terminan en 999. Por tanto,  $a \equiv b \equiv c \pmod{1000}$ .

Escribamos  $a = 1000A + r$ ,  $b = 1000B + r$  y  $c = 1000C + r$ , con  $0 \leq r \leq 999$  y, sin pérdida de generalidad,  $A < B < C$ .

Si  $r < 999$ , tomando  $k = 1$  se obtiene  $s(A) = s(B) = s(C)$ . Si esta suma es 1, entonces  $A+B+C \geq 1 + 10 + 100 = 111$ . Si es al menos 2, como  $A \equiv B \equiv C \pmod{9}$ , tenemos  $A \geq 2$ ,  $B \geq A + 9$  y  $C \geq A + 18$ . Así,  $a + b + c \geq 1000(2 + 11 + 20) = 33000$ .

Si  $r = 999$ , tomando  $k = 1$  se obtiene  $s(A+1) = s(B+1) = s(C+1)$ . Si esta suma es 1, resulta  $a + b + c \geq 110997$ . Si es al menos 2, entonces  $A \geq 1$ ,  $B \geq A + 9$  y  $C \geq A + 18$ , por lo que  $a + b + c \geq 1000(1 + 10 + 19) + 3 \cdot 999 = 32997$ .

Finalmente, se comprueba que  $a = 1999$ ,  $b = 10999$  y  $c = 19999$  cumplen la condición para todo  $1 \leq k \leq 2026$ . El número buscado es 32997 y la suma de sus dígitos es 30.

Respuesta: 30